

Условия и решение задач  
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике  
и физике космоса им. Всеволода Сергеевича Троицкого  
27 января 2013 г.

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

- а) Небесное тело Плутон назвали в честь:  
 1) древнегреческого философа;  
 2) древнегреческого героя;  
 3) римского бога;  
 4) химического элемента, обнаруженного на планете.
- б) Спутники Юпитера впервые увидел:  
 1) Аристотель;  
 2) Галилей;  
 3) Кеплер;  
 4) Ньютон.
- в) Первым в открытый космос вышел:  
 1) Нил Армстронг;  
 2) Юрий Гагарин;  
 3) Алексей Леонов;  
 4) Эдвин Олдрин.
- г) Созвездие Стрельца можно наблюдать в Нижегородской области:  
 1) летом в южной части неба;  
 2) летом в северной части неба;  
 3) зимой в южной части неба;  
 4) зимой в северной части неба.
- д) Астрономическая единица равна:  
 1) расстоянию от Земли до Солнца;  
 2) угловому размеру Солнца;  
 3) видимой звёздной величине Солнца;  
 4) плотности потока солнечного излучения на орбите Земли.
- е) Если бы земную ось отклонили настолько, что она оказалась в плоскости движения Земли вокруг Солнца, то сезонные изменения стали:  
 1) мягче;  
 2) сильнее;  
 3) значительных изменений не произойдёт.
- ж) Сутки на Луне (время между двумя восходами Солнца) составляют:  
 1) приблизительно земные сутки;    2) приблизительно неделю;  
 3) приблизительно месяц;    4) Солнце не заходит на Луне.

2. Сколько длится восход Солнца в Санкт-Петербурге (географические координаты  $60^\circ$  с. ш.,  $33^\circ$  в. д.) в день весеннего равноденствия? Видимый угловой диаметр Солнца  $0,5^\circ$ .

3. Космическая станция вращается вокруг Земли на экваториальной орбите на высоте 300 км. Сколько необходимо наземных станций, чтобы обеспечить непрерывную связь с космонавтами? Радиус Земли 6 400 км. При расчёте используйте известное выражение  $L = 2\pi R$  для длины окружности радиуса  $R$ .

4. Оцените амплитуду колебаний скорости центра Земли, вызванного вращением Луны вокруг Земли. Расстояние от Земли до Луны 380 тыс. км, период обращения Луны вокруг Земли 28 дней, масса Земли в 80 раз больше массы Луны.

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

- а) Точка наименьшего расстояния между планетой и Солнцем называется:
- 1) перигей;
  - 2) перигелий;
  - 3) периселений;
  - 4) периастр.
- б) Растущая Луна в первой четверти восходит в Нижнем Новгороде:
- 1) в 6 утра;
  - 2) в полдень;
  - 3) в 6 вечера.
  - 4) в полночь.
- в) Центр нашей Галактики не виден невооружённым глазом, потому что:
- 1) находится слишком далеко;
  - 2) его излучение поглощает чёрная дыра в центре;
  - 3) закрыт пылью от нас;
  - 4) там находится лишь тёмная материя.
- г) Во время солнечного затмения центры дисков Луны и Солнца совпали. Может ли край диска Солнце остаться открытым?
- 1) может;
  - 2) не может;
  - 3) теоретически может, но такой случай пока не наблюдался.
- д) Цефеидами называют:
- 1) метеорный поток;
  - 2) крупные астероиды;
  - 3) переменные звёзды;
  - 4) активные ядра галактик.
- е) Один парсек примерно равен:
- 1) расстоянию от Земли до Солнца;
  - 2) радиусу Солнечной системы;
  - 3) расстоянию до ближайшей к Солнцу звезды;
  - 4) трём световым годам.
- ж) Современный григорианский календарь отличается от юлианского тем, что:
- 1) введены високосные года;
  - 2) все сотые года стали невисокосными;
  - 3) сотые года стали невисокосными через один;
  - 4) сотые года стали невисокосными, кроме тех, что делятся на 400.

2. По древнегреческому мифу наковальня бога Вулкана падала с неба 9 дней. В таком случае с какой высоты она свалилась? Для расчёта используйте то обстоятельство, что Луна обращается вокруг Земли по орбите с радиусом 380 тыс. км за 28 дней.

3. За какое минимальное время звезда (или планета) со средней плотностью  $\rho$  может совершать оборот вокруг своей оси, чтобы на ней сила тяготения ещё удерживала вещество против центробежной силы? а) Приведите оценку для планет земного типа со средней плотностью  $\rho = 5 \text{ кг/дм}^3$ . б) Оцените минимальную допустимую плотность вещества пульсара (нейтронной звезды) с периодом вращения 1 мс. Гравитационная постоянная  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ . При расчёте используйте известное выражение  $V = 4\pi R^3/3$  для объёма шара радиуса  $R$ .

4. Сверхновая достигает абсолютной звёздной величины  $M = -21$  в максимуме блеска (абсолютная звёздная величина — звёздная величина объекта, если бы он располагался на расстоянии 10 парсек от наблюдателя). Как часто будут регистрироваться вспышки сверхновых, если наблюдение ведётся по всему небу до предельной величины  $m = 14$ ? Считайте, что в типичной галактике сверхновая вспыхивает один раз в 100 лет, а во Вселенной в среднем одна галактика приходится на 10 кубических мегапарсек. Звёздная величина  $m$  связана с принимаемым световым потоком  $F$  соотношением  $m = -2,5 \lg F + \text{const}$ .

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

- а) Более тяжёлые звёзды живут:  
 1) дольше;  
 2) меньше;  
 3) время жизни звезды слабо зависит от её массы.
- б) Первый радиотелескоп построил:  
 1) Генрих Герц;  
 2) Джеймс Максвелл;  
 3) Гульельмо Маркони;  
 4) Карл Янский.
- в) Атмосферное давление больше на:  
 1) Венере;  
 2) Земле;  
 3) Марсе.
- г) Бозон Хиггса:  
 1) имеет нулевую массу покоя, как и фотон;  
 2) легче протона;  
 3) тяжелее протона.
- д) Наиболее распространённые ядра во Вселенной:  
 1) водорода;  
 2) гелия;  
 3) кислорода;  
 4) кремния;  
 5) железа.
- е) Приливы на Земле самые слабые:  
 1) в новолуние;  
 2) когда Луна находится в первой четверти;  
 3) в полнолуние.
- ж) Пусть в полнолуние Луна занимает наиболее высокое возможное положение на небе. Тогда лунное или солнечное затмение можно ожидать примерно через:  
 1) две недели; 2) три месяца; 3) полгода; 4) год.

2. Три звезды с произвольными массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  находятся в вершинах правильного треугольника со стороной  $R$ . а) С какой угловой скоростью необходимо закрутить систему, чтобы расстояния между звёздами сохранялись при дальнейшем движении (6 баллов)? б) Приведите подобный пример расположения тел в Солнечной системе (1 балл).

3. Зоной обитаемости условно называют область в космосе, где вода на планете земного типа может находиться в жидком состоянии. Оцените зону обитаемости в Солнечной системе, если средняя температура на Земле  $14^\circ\text{C}$ . Считайте, что подогрев гипотетической планеты солнечным излучением компенсируется её охлаждением за счёт собственного теплового излучения, поток  $J$  которого с единицы поверхности пропорционален абсолютной температуре планеты  $T$  в 4-й степени:  $J = \text{const} \cdot T^4$ . Попадают ли в зону обитаемости орбиты Венеры или Марса с радиусами 0,7 а. е. и 1,5 а. е. соответственно?

4. По современным представлениям основную долю энергии Вселенной составляют так называемые холодное тёмное вещество и тёмная энергия. Частицы тёмного вещества не появляются и не исчезают, а их энергия в основном определяется энергией покоя  $mc^2$ . В свою очередь, тёмная энергия отличается тем, что её пространственная плотность остаётся постоянной при расширении Вселенной. В настоящее время возраст Вселенной примерно 14 млрд. лет, а тёмное вещество и тёмная энергия составляют соответственно 25 % и 75 % от всей энергии Вселенной. Оцените, каким был возраст Вселенной, когда относительное содержание тёмного вещества и тёмной энергии было по 50 %. Считайте, что «радиус» Вселенной увеличивался с постоянной скоростью.

1. а) 3) римского бога.
- б) 2) Галилей.
- в) 3) Алексей Леонов.
- г) 1) Летом в южной части неба.
- д) 1) Расстоянию от Земли до Солнца.
- е) 2) Сильнее.
- ж) 3) Приблизительно месяц.

## 2. 4 мин.

В день весеннего равноденствия Солнце находится на небесном экваторе: восходит строго на востоке и в течение суток движется в плоскости, строго перпендикулярной направлению на Полярную звезду. Направление на Полярную звезду составляет с плоскостью горизонта угол  $\varphi$ , равный широте места наблюдения  $60^\circ$ . Соответственно, Солнце восходит к линии горизонта под углом

$$\vartheta = 90^\circ - \varphi = 30^\circ.$$

Темп подъёма Солнца над горизонтом определяется вертикальной составляющей

$$v_{\text{vert}} = v \sin \vartheta$$

полной скорости  $v$  перемещения светила по небу. За сутки Солнце совершает полный оборот вокруг направления на Полярную звезду в экваториальной плоскости, поэтому полная скорость

$$v = 360^\circ / 1 \text{ сут} = 360^\circ / (24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}) = 1^\circ / 240 \text{ с},$$

а вертикальная компонента на восходе  $v_{\text{vert}} = v \sin \vartheta = v/2 = 0,5^\circ / 240 \text{ с}$ . Восход занимает время  $t$ , которое необходимо Солнцу, чтобы подняться над горизонтом на свой угловой диаметр  $\alpha = 0,5^\circ$ . Следовательно, искомое время

$$t = \alpha / v_{\text{vert}} = 240 \text{ с} = 4 \text{ мин.}$$

## 3. Больше 10.

Полагаем, что станция слежения обеспечивает связь с космической станцией, если последняя находится над горизонтом. В момент потери связи космическая станция находится на линии горизонта. Следовательно, направление на космическую станцию строго перпендикулярно вертикали в точке нахождения станции слежения. Тогда отрезки, соединяющие станцию слежения с центром Земли и с космической станцией, образуют катеты в прямоугольном треугольнике, один из которых равен радиусу Земли  $R_E$ , а другой — расстоянию  $D$  от станции слежения до космической станции. Гипотенузу образует отрезок, соединяющий центр Земли и космическую станцию, с длиной  $R_E + h$ , где  $h$  — высота полёта космической станции. Таким образом, расстояние между станцией слежения и космической станцией (один из катетов) находим по теореме Пифагора:

$$D = \sqrt{(R_E + h)^2 - R_E^2} = \sqrt{(2R_E + h)h} \approx \sqrt{2R_E h}.$$

Для поддержания непрерывной связи расстояние между станциями слежения должно быть меньше  $2D$ , чтобы космическая станция заходила за горизонт для одной станции слежения и одновременно поднималась над горизонтом для другой станции слежения. Здесь в силу малости высоты полёта  $h = 300$  км по сравнению с радиусом Земли  $R_E = 6400$  км мы пренебрегаем отличием сумм длин отрезков, соединяющих космическую станцию с двумя соседними станциями слежения, и расстоянием между станциями слежения вдоль поверхности Земли. Таким образом, для поддержания непрерывной связи необходимо расположить на экваторе станции слежения в количестве

$$N > 2\pi R_E / (2D) = \pi \sqrt{R_E / (2h)} = \sqrt{3,14^2 \cdot 6400 / (2 \cdot 300)} > 10$$

(здесь  $2\pi R_E$  — длина экватора).

#### 4. 12 м/с.

Земля и Луна вращаются вокруг общего центра масс, который удалён от центра Земли на расстояние

$$r = \frac{M_M L}{M_E + M_M} \approx \frac{M_M L}{M_E} = \frac{380\,000 \text{ км}}{80} \approx 4750 \text{ км},$$

где  $M_M$  и  $M_E$  — массы Луны и Земли соответственно. Таким образом, центр Земли движется по окружности радиуса  $r$  и совершает полный оборот за время  $T = 28$  дней. Скорость движения центра Земли по окружности и равная ей искомая амплитуда колебаний в некотором направлении составляет

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 4750 \text{ км}}{28 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}} \approx 12 \text{ м/с}.$$

Решение задач 10 класса

1. а) 2) Перигелий.
- б) 2) В полдень.
- в) 3) Закрыт пылью от нас.
- г) 1) Может. Это так называемое кольцевое затмение.
- д) 3) Переменные звёзды.
- е) 4) Трём световым годам.
- ж) 4) Сотые года стали невисокосными, кроме тех, что делятся на 400.

2. 570 тыс. км

Падение наковальни на Землю соответствует движению по сильно вытянутому эллипсу, у которого наиболее удалённая точка (перигей) находится в точке начала движения наковальни, а наиболее близкая точка (апогей) совпадает с фокусом, находящимся в центре Земли. Согласно третьему закону Кеплера период обращения тела по эллипсу пропорционален большой оси эллипса в степени  $3/2$ . В случае наковальни большая ось равна искомому начальному расстоянию  $L$  от наковальни до центра Земли, а в случае Луны — диаметру её орбиты  $2R_M$ . В свою очередь, период обращения наковальни по эллипсу составлял бы удвоенное время падения наковальни (если бы она не столкнулась с Землёй)  $2T = 2 \cdot 9$  дней. Таким образом, выполняется соотношение  $2T/T_M = [L/(2R_M)]^{3/2}$  (здесь  $T_M = 28$  дней — период обращения Луны), что определяет искомое расстояние

$$L = 2R_M (2T/T_M)^{2/3} = 2 \cdot 380\,000 (2 \cdot 9 \text{ дней} / 28 \text{ дней})^{2/3} \text{ км} = 570 \text{ тыс. км.}$$

Наковальня начала падать за пределами орбиты Луны.

3. а) 1,5 ч; б)  $1,4 \cdot 10^8 \text{ т/см}^3$ .

Рассмотрим точки на экваторе, где центробежная сила максимальна. В случае баланса центробежной силы и силы тяготения вещество звезды перестаёт давить на подстилающие слои и, таким образом, вращается по круговой орбите, как спутник. На круговой орбите центростремительное ускорение  $v^2/R$  создаётся силой тяготения и поэтому совпадает с ускорением свободного падения  $GM/R^2$  (здесь  $v$  — скорость движения точек на экваторе,  $R$  — радиус звезды,  $M$  — масса звезды,  $G$  — гравитационная постоянная). В свою очередь, скорость движения спутника  $v = 2\pi R/T$  определяется длиной экватора  $2\pi R$  и искомым периодом обращения  $T$ . Массу звезды  $M$  выразим через её плотность  $\rho$  и объём  $V = 4\pi R^3/3$ :  $M = \rho V = 4\pi \rho R^3/3$ . Указанное выше равенство ускорений запишется в виде

$$\frac{(2\pi R/T)^2}{R} = \frac{G(4\pi \rho R^3/3)}{R^2},$$

что определяет искомый минимальный допустимый период обращения  $T = \sqrt{3\pi/(G\rho)}$ . Предельный период  $T$  не зависит от радиуса звезды.

- а) Для земной плотности  $\rho = 5 \text{ кг/дм}^3 = 5\,000 \text{ кг/м}^3$  находим оценку

$$T = \sqrt{3 \cdot 3,14 / (6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5\,000)} \text{ с} \approx 5300 \text{ с} = 1,5 \text{ ч.}$$

- б) Минимальная допустимая плотность вещества пульсара

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3 \cdot 3,14}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 0,001^2} \text{ кг/м}^3 = 1,4 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3 = 1,4 \cdot 10^8 \text{ т/см}^3.$$

Такая плотность всего в три раза меньше характерной ядерной плотности. Действительно, радиус  $r_p$  протона составляет примерно  $1 \text{ фм} = 10^{-13} \text{ см}$ , а масса частицы  $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , что определяет характерную ядерную плотность

$$\rho_n = \frac{m_p}{4\pi r_p^3/3} = 4 \cdot 10^{11} \text{ кг/см}^3 = 4 \cdot 10^8 \text{ т/см}^3.$$

#### 4. 4200 сверхновых в год.

В отсутствие поглощения через любую сферу, охватывающую звезду, проходит одинаковый поток излучения, равный светимости звезды. Вместе с тем площадь сферы пропорциональна квадрату её радиуса. Поэтому поток через единицу поверхности (например, через входное отверстие (апертуру) телескопа) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния  $R$  до звезды:  $F = F_0 (10 \text{ пк}/R)^2$ , где  $F_0$  — поверхностная плотность потока излучения на расстоянии 10 пк. Тогда видимая звёздная величина запишется как

$$m = -2,5 \lg F + \text{const} = -2,5 \lg [F_0 (10 \text{ пк}/R)^2] + \text{const} = [-2,5 \lg F_0 + \text{const}] + 5 \lg(R/10 \text{ пк}).$$

В последнем выражении величина в квадратных скобках  $-2,5 \lg F_0 + \text{const}$  по определению совпадает с абсолютной звёздной величиной  $M$ . Следовательно,  $m = M + 5 \lg(R/10 \text{ пк})$ . Тогда максимальное расстояние, до которого регистрируются сверхновые,

$$R = 10^{(m-M)/5} \cdot 10 \text{ пк} = 10^{1+(m-M)/5} \text{ пк} = 10^{1+[14-(-21)]/5} \text{ пк} = 10^8 \text{ пк}.$$

Такому расстоянию соответствует объём  $V = 4\pi R^3/3$  в виде шара радиуса  $R$ . В этом объёме находятся  $N = \rho V = 4\pi \rho R^3/3$  галактик, где  $\rho = 1/10 \text{ Мпк}^{-3} = 10^{-19} \text{ пк}^{-3}$  — концентрация галактик. Темп регистрации сверхновых составит величину

$$\nu = \frac{N}{T} = \frac{4\pi \rho R^3}{3T} = \frac{4\pi \rho [10^{1+(m-M)/5}]^3}{3T} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-19} \cdot (10^8)^3}{3 \cdot 100 \text{ лет}} \approx 4200 \text{ событий в год},$$

где  $T = 100 \text{ лет}$  — характерный временной интервал между вспышками сверхновых в одной галактике.



Решение задач 11 класса

1. а) 2) Меньше.
- б) 4) Карл Янский.
- в) 1) Венере.
- г) 3) Тяжелее протона.
- д) 1) Водорода.
- е) 2) Когда Луна находится в первой четверти.
- ж) 2) Три месяца.

2. а) Относительно любой оси, перпендикулярной плоскости начального треугольника звёзд, с угловой скоростью  $\omega = \sqrt{G(m_1 + m_2 + m_3)/R^3}$ .

б) Солнце, Юпитер и так называемые астероиды «троянцы» и «греки».

Если расстояние между звёздами остаётся неизменным и равным  $R$ , то в произвольный момент времени вторая и третья звёзды притягивают первую звезду с силой

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -\frac{Gm_1m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - \frac{Gm_1m_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} = -\frac{Gm_1}{R^3} [m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + m_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)] = \\ &= -\frac{Gm_1}{R^3} [(m_1 + m_2 + m_3)\vec{r}_1 - (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3)] = -\frac{Gm_1M}{R^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_c),\end{aligned}$$

где  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  и  $\vec{r}_3$  — положения первой, второй и третьей звёзд,

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{M}$$

— положение центра масс системы,

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

— масса системы,  $G$  — гравитационная постоянная. Такая сила придаёт первой звезде ускорение  $\vec{a}_1 = \vec{F}_1/m_1 = -GM(\vec{r}_1 - \vec{r}_c)/R^3$ , которое лежит в плоскости треугольника, образованного звёздами, и направлено к центру масс системы. Аналогично рассчитываются ускорения для второй и третьей звёзд:

$$\vec{a}_i = -\frac{GM}{R^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_c),$$

где  $i = 2, 3$ .

Ускорения  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  пропорциональны удалённости звёзд  $\vec{r}_i - \vec{r}_c$  от центра масс  $\vec{r}_c$  и поэтому совпадают с центростремительными ускорениями  $-\omega^2(\vec{r}_i - \vec{r}_0)$  по величине и направлению, если система вращается относительно центра масс ( $\vec{r}_0 = \vec{r}_c$ ) в начальной плоскости трёх звёзд с угловой скоростью

$$\omega = \sqrt{GM/R^3}.$$

Таким образом, частным решением задачи является закрутка звёзд с указанной выше угловой скоростью относительно оси, проходящей центр масс системы (точку  $\vec{r}_c$ ) перпендикулярно плоскости начального треугольника звёзд.

Систему можно закручивать не только относительно оси, проходящей через центр масс, а и относительно любой оси, перпендикулярной плоскости начального треугольника звёзд

(но с той же угловой скоростью  $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ ). При таком запуске центр масс системы будет двигаться равномерно и прямолинейно, а звёзды будут вращаться относительно центра масс с угловой скоростью  $\omega$ . Вместе с тем звёздам можно придать одинаковые дополнительные начальные скорости перпендикулярно плоскости начального треугольника.

б) В Солнечной системе правильный треугольник образуют Солнце, Юпитер и так называемые астероиды «греки», которые движутся за Юпитером. Другая группа астероидов «троянцы» движутся впереди Юпитера и также образуют правильный треугольник Солнце—Юпитер—«троянцы». По сути астероиды движутся в гравитационном поле Солнца и Юпитера.

### 3. От 0,59 до 1,11 а. е. Орбита Венеры попадает в зону обитаемости, а Марса — нет.

Выберем сферу с центром на Солнце и с радиусом, равным радиусу орбиты гипотетической планеты. Через сферу проходит поток излучения, равный светимости Солнца  $L_{\odot}$ . Соответственно, через единицу поверхности сферы проходит поток излучения  $f = L_{\odot}/S = L_{\odot}/(C_{\text{sph}}R^2)$ , где  $S = C_{\text{sph}}R^2$  — площадь поверхности сферы, пропорциональная квадрату её радиуса  $R$ ;  $C_{\text{sph}}$  — константа ( $4\pi$ ), не зависящая от  $R$ . Планета перехватывает поток солнечного излучения  $F_{\text{inc}} = f s_{\perp} = f (C_{\perp}r^2) = L_{\odot}C_{\perp}r^2/(C_{\text{sph}}R^2)$ , который проходит через её поперечное сечение  $s_{\perp} = C_{\perp}r^2$ , пропорциональное квадрату радиуса планеты  $r$ ; здесь  $C_{\perp}$  — константа ( $\pi$ ), которая не зависит от  $r$ . В свою очередь, потери планеты на собственное тепловое излучение в космос пропорциональны её площади  $s = C_{\text{sph}}r^2$  и составляют величину  $F_{\text{out}} = Js = \text{const } T^4 C_{\text{sph}}r^2$ . Баланс потоков падающего и исходящего излучений ( $F_{\text{inc}} = F_{\text{out}}$ ) выражается в виде равенства  $L_{\odot}C_{\perp}r^2/(C_{\text{sph}}R^2) = \text{const } T^4 C_{\text{sph}}r^2$  и определяет температуру планеты  $T = C/\sqrt{R}$ , где константа  $C = (L_{\odot}C_{\perp}/C_{\text{sph}}^2)^{1/4}$  не зависит от радиуса планеты и её расстояния до Солнца. Константа  $C$  может быть выражена через температуру Земли  $T_{\text{E}} = 273 + 14 \text{ K} = 287 \text{ K}$  и радиус  $R_{\text{E}} = 1 \text{ а. е.}$  её орбиты:  $C = T_{\text{E}} \sqrt{R_{\text{E}}}$ .

Внутренняя граница зоны обитаемости соответствует орбите, где закипает вода и температура  $T_{\text{in}} = 273 + 100 \text{ K} = 373 \text{ K}$ , что определяет минимальный допустимый радиус орбиты планеты  $R_{\text{in}} = C^2/T_{\text{in}}^2 = R_{\text{E}} T_{\text{E}}^2/T_{\text{in}}^2 = 287^2/373^2 \text{ а. е.} = 0,59 \text{ а. е.}$  На внешней границе зоны обитаемости вода замерзает (температура  $T_{\text{out}} = 273 \text{ K}$ ), чему соответствует максимальное допустимое расстояние до Солнца  $R_{\text{out}} = R_{\text{E}} T_{\text{E}}^2/T_{\text{out}}^2 = 287^2/273^2 \text{ а. е.} = 1,11 \text{ а. е.}$

Таким образом, орбита Венеры попадает в зону обитаемости, а Марса — нет. На Марсе вода замерзает.

### 4. 9,7 млрд. лет.

Суммарная энергия тёмного вещества во «всей» Вселенной остаётся постоянной при расширении. В свою очередь, количество тёмной энергии пропорционально «объёму» Вселенной. В настоящее время количество тёмной энергии превышает энергию тёмного вещества в  $\eta = (75\%)/(25\%) = 3$  раза. Поэтому количество тёмной энергии было равно энергии тёмного вещества, когда «объём» Вселенной был в  $\eta$  раз меньше. Поскольку «объём» Вселенной пропорционален кубу её радиуса, то радиус должен быть в  $\eta^{1/3} = 3^{1/3} \approx 1,44$  раз меньше. В свою очередь, радиус Вселенной пропорционален её возрасту. Следовательно, равенство энергий достигалось, когда Вселенная была в  $\eta^{1/3}$  раз «моложе» и её возраст составлял  $14 \text{ млрд. лет}/(\eta^{1/3}) = 9,7 \text{ млрд. лет.}$