**Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Бориса Васильевича Кукаркина
03 февраля 2019 г.**

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Какой объект рождён вне Солнечной системы:
   1) Квавар;
   2) комета Галлея;
   3) Макемаке;
   4) Оумуамуа?

б) Самая большая планета в Солнечной системе:
   1) Земля;
   2) Солнце;
   3) Хаумея;
   4) Юпитер?

в) Орбита какого объекта сильнее всего отличается от окружности:
   1) Земли;
   2) Меркурия;
   3) Плутона;
   4) Урана?

г) Самый большой из спутников Юпитера:
   1) Европа;
   2) Ио;
   3) Ганимед;
   4) Каллисто?

д) Звезда Вега находится в созвездии:
   1) Лебедь;
   2) Лира;
   3) Орёл;
   4) Орион?

е) Сколько людей побывало на Луне:
   1) двенадцать;
   2) семь;
   3) три;
   4) ни одного?

ж) Какой из объектов не является карликовой планетой:
   1) Меркурий; 2) Плутон; 3) Церера; 3) Эрида?

2. Нижегородская область простирается с запада на восток от $41°46{,}6'$ в. д. до $47°46{,}3'$ в. д. Определите ширину нашей области по линии запад — восток в километрах, если широта Нижнего Новгорода примерно $56°$. Длина земного экватора 40 тыс. км.

3. Две космические экспедиции высадились на планету Акронис на одинаковых зондах и обнаружили, что по отдельности не могут взлететь с неё. На первом зонде не хватает 5 т горючего, а на втором объём топлива выше половины от минимального необходимого уровня лишь на 1 т. Тогда космонавты решили объединить горючее и взлететь на одном зонде. После заполнения баков до минимального необходимого уровня на втором зонде осталось ещё 0,5 т горючего. Каково минимальное необходимое количество топлива для успешного взлёта?

4. а) Определите массу воздуха в земной атмосфере, приходящуюся на 1 $м^2$ поверхности планеты. Атмосфера давит на 1 $м^2$ поверхности с силой 10^5 Н, ускорение свободного падения 10 $м/с^2$.

б) Вычислите высоту земной атмосферы, если бы при подъёме плотность воздуха оставалась такой же, как у поверхности Земли, — 1,3 $кг/м^3$. Сравните полученное значение с высотой Эвереста 8 848 м.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) У какой из указанных планет наименьшее количество естественных спутников:
   1) Венера;
   2) Земля;
   3) Марс;
   4) Сатурн?

б) В какое время суток можно наблюдать восход узкого месяца «рожками» вверх:
   1) утром;
   2) в полдень;
   3) вечером;
   4) в полночь?

в) Подброшенный на Земле вертикально вверх мяч вернулся через 4 с. В полёте ускорение тела:
   1) монотонно уменьшалось;
   2) оставалось постоянным;
   3) монотонно возрастало;
   4) имело противоположное направление при подъёме и спуске?

г) Компонеты разных спектральных классов вращаются в двойной звёздной системе вокруг:
   1) точки, где силы притяжения к каждой из звёзд равны;
   2) середины отрезка между центрами звёзд;
   3) точки, где угловые размеры звёзд равны;
   4) центра масс системы?

д) Ускорение свободного падения на орбите Международной космической станции:
   1) нулевое;
   2) 5 м/с^2;
   3) 10 м/с^2;
   4) 20 м/с^2?

е) Крупнейший из найденных метеоритов «Гоба» объёмом 9 м^3 имел после падения массу около:
   1) 700 кг;
   2) 7 т;
   3) 70 т;
   4) 700 т?

ж) Эклиптика проходит:
   1) по галактическому экватору; 2) по зодиакальному кругу;
   3) по Млечному пути; 4) по небесному экватору?

2. В ближайшем к нам крупном скоплении галактик Кома периферийные галактики движутся вокруг центра данной системы с характерной скоростью $2 \cdot 10^6$ м/с. а) Оцените массу скопления в массах Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, если характерный радиус системы $R = 10^{23}$ м. б) Оцените долю тёмной материи в полученной массе скопления, если масса видимого вещества в системе $M_б = 3 \cdot 10^{14} M_\odot$. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2).

3. В настоящее время зимнее солнцестояние примерно совпадает с моментом, когда Земля проходит перигелий — точку максимального сближения с Солнцем в своём движении по эллиптической орбите. Используя первый и второй законы Кеплера, определите, насколько «полугодовой» временной интервал от весеннего до осеннего равноденствия отличается от аналогичного интервала от осеннего до весеннего равноденствия. Фокус эллиптической орбиты (где находится Солнце) смещён от центра эллипса на 1,7 % в единицах среднего радиуса орбиты. Площадь окружности с радиусом r равна πr^2.

4. Звездолёт представляет собой головной отсек с массой m_0, к которому присоединена

цепочка из N блоков-ступеней с геометрически нарастающими массами $m_1 = m_0$, $m_2 = 2m_0$, $m_3 = 4m_0 \ldots$ $m_N = 2^{N-1}m_0$. Головной отсек соединён с первой ступенью сжатой пружиной, потенциальная энергия которой $E_1 = E_0$. В свою очередь, остальные блоки-ступени последовательно соединены между собой в цепочку $N-1$ сжатыми пружинами с геометрически нарастающей потенциальной энергией $E_2 = 2E_0$, $E_3 = 4E_0 \ldots$ $E_N = 2^{N-1}E_0$. Вдали от притягивающих тел звездолёт приводится в движение последовательным освобождением пружин, начиная с хвоста, и сбросом блоков-ступеней с пружинами в момент снятия напряжения в пружине. Сначала освобождается хвостовая N-я пружина, в момент её распрямления до несжатого состояния она отцепляется от звездолёта вместе с идущим за ней концевым N-м блоком-ступенью. Далее указанный процесс последовательно повторяется для $(N-1)$-й, $(N-2)$-й и т. д. пружин и блоков-ступеней. Какую скорость приобретёт головной отсек после окончания работы всех ступеней «двигателя»?

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) На поверхности какого из указанных тел атмосферное давление наибольшее:
   1) Европа;
   2) Земля;
   3) Марс;
   4) Титан?

б) Свет от ближайшей к Солнцу звезды распространяется до Земли примерно:
   1) за 4 года;
   2) за 4 десятилетия;
   3) за 4 столетия;
   4) за 4 тысячелетия?

в) По окончании своего термоядерного горения Солнце превратится:
   1) в белый карлик;
   2) в нейтронную звезду;
   3) в чёрную дыру;
   4) в пустое место (рассеется в космосе)?

г) Площадь поверхности планеты радиуса $2R$ больше площади планеты радиуса R:
   1) в 1,4 раза;
   2) в 2 раза;
   3) в 4 раза;
   4) в 8 раз?

д) Красноватый оттенок Луны во время полного лунного затмения обусловлен:
   1) рассеянием света в атмосфере Луны;
   2) собственным излучением Луны;
   3) рассеянием света в атмосфере Земли;
   4) отражением света от поверхности Земли?

е) Ускорение свободного падения внутри Земли на половине радиуса планеты по сравнению с величиной 10 м/с^2:
   1) в 4 раза меньше;
   2) в 2 раза меньше;
   3) в 2 раза больше;
   4) в 4 раза больше?

ж) В системе центра масс Солнечной системы импульс Юпитера по сравнению с импульсом Солнца:
   1) существенно больше; 2) примерно такой же; 3) существенно меньше?

2. Пусть в результате пролёта звезды сквозь Солнечную систему Юпитер перешёл с современной орбиты с радиусом $L_0 = 5{,}2$ а. е. на орбиту с радиусом $L' = 0{,}1$ а. е. а) Оцените равновесную температуру поверхности Юпитера на новой орбите. б) Избежит ли планета катастрофического испарения из-за нагрева Солнцем? Юпитер в основном состоит из молекулярного водорода, масса протона (ядра атома водорода) $m_\text{р} = 1{,}7{\cdot}10^{-27}$ кг, радиус планеты $R_\text{Ю} = 70\,000$ км, ускорение свободного падения на поверхности $g_\text{Ю} = 25$ м/с^2, современная температура планеты $T_0 = 130$ К, постоянная Больцмана $k_\text{Б} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Считать, что поток собственного излучения планеты с 1 м^2 поверхности пропорционален температуре в четвёртой степени.

3. Пусть в начальный момент времени скорость v пылинок однородного шарового облака направлена радиально и пропорциональна расстоянию r до центра облака: $\vec{v} = H_0\vec{r}$, где H_0 — постоянная. При какой максимальной начальной плотности пыли облако неограниченно разлетится в окружающее пространство? Объём шара радиуса R равен $4\pi R^3/3$.

4. Определите разность звёздных величин Марса в моменты его соединения и противостояния с Солнцем (соответственно, максимального и минимального удаления планеты от Земли), если указанные события происходят с интервалом в $t = 390$ суток. Разность

звёздных величин объектов с принимаемыми потоками F_1 и F_2 определена равенством $m_1 - m_2 = -2{,}5\lg(F_1/F_2)$.

1. а) 4) Оумуамуа.
б) 4) Юпитер.
в) 3) Плутона.
г) 3) Ганимед.
д) 2) Лира.
е) 1) двенадцать.
ж) 1) Меркурий.

2. 370 км.

Широта $\lambda = 56^\circ$ представляет собой окружность с центром на оси вращения Земли. Расстояние от точек на широте λ до оси вращения Земли равно $R\cos\lambda$, где R — радиус Земли. Таким образом, длина окружности в виде широты λ меньше длины экватора $L = 40$ тыс. км в $1/\cos\lambda$ раз и равна $L\cos\lambda$. Протяжённость Нижегородской области с запада на восток составляет $\Delta\varphi = 47^\circ 46{,}3' - 41^\circ 46{,}6' \approx 6^\circ$, или $\Delta\varphi/360^\circ \approx 1/60$ часть длины окружности в виде широты λ. Получаем искомую ширину Нижегородской области $(L\cos\lambda)\,\Delta\varphi/360^\circ \approx 40\,000 \cdot 0{,}56 \cdot (1/60) \approx 370$ км.

3. 9 т.

Обозначим за x — искомое минимальное необходимое количество топлива. Тогда на первом зонде осталось $x - 5$ т горючего, а на втором — $0{,}5x + 1$ т. Суммарное количество топлива на двух зондах $(x - 5\text{ т}) + (0{,}5x + 1\text{ т}) = 1{,}5x - 4$ т превышает уровень x на 0,5 т, что определяет уравнение на величину x:

$$1{,}5x - 4\text{ т} = x + 0{,}5\text{ т}.$$

Решение данного уравнения $x = 9$ т.

4. а) 10 т;
б) 8 км, порядка высоты Эвереста.

а) На атмосферный столб с сечением $s = 1$ м^2 и искомой массой m действует сила тяжести mg и нормальная реакция поверхности Земли N ($g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения). По третьему закону Ньютона реакция N равна силе давления воздуха на поверхность 10^5 Н. В силу отсутствия вертикального движения воздуха, сила тяжести mg и реакция N компенсируют друг друга: $mg = N$. Получаем искомую массу воздуха на 1 м^2 земной поверхности:

$$m = N/g = 10^5\text{ Н}/(10\text{ м/с}^2) = 10^4\text{ кг} = 10\text{ т}. \tag{1}$$

б) Если бы плотность воздуха не уменьшалась с высотой, то столб воздуха имел бы объём sh, а масса m воздуха в нём равнялась ρsh, где $\rho = 1{,}3$ кг/м^3, h — искомая высота. Приравнивая величину ρsh и значение (1), находим высоту

$$h = \frac{N}{\rho s g} = \frac{10^5\text{ Н}}{1{,}3\text{ кг/м}^3 \times 1\text{ м}^2 \times 10\text{ м/с}^2} \approx 7\,700\text{ м} \approx 8\text{ км}.$$

Данное значение одного порядка величины с высотой Эвереста.

Решение задач 10 класса

1. а) 1) Венера.

б) 1) Утром.

в) 2) Оставалось постоянным.

г) 4) Центра масс системы.

д) 3) 10 м/с^2.

е) 3) 70 т.

ж) 2) По зодиакальному кругу.

2. а) $3 \cdot 10^{15} M_\odot$;

б) 90 %.

При движении галактики со скоростью v по окружности с радиусом R центростремительное ускорение v^2/R обусловлено силой гравитации скопления и поэтому совпадает с ускорением свободного падения GM/R^2, где M — искомая масса скопления. Уравнение $v^2/R = GM/R^2$ определяет массу $M = v^2R/G$, которая переписывается в единицах массы Солнца как

$$\frac{M}{M_\odot} = \frac{v^2R}{GM_\odot} = \frac{(2 \cdot 10^6 \text{ м/с})^2 \times 10^{23} \text{ м}}{[6{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)] \times 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}} = 3 \cdot 10^{15}.$$

Тогда доля видимого вещества составляет $M_б/M = 3 \cdot 10^{14} M_\odot/(3 \cdot 10^{15} M_\odot) = 0{,}1 = 10$ %, а остальные 90 % приходятся на тёмное вещество.

3. 7,9 суток.

В моменты зимнего и летнего солнцестояния линия Солнце — Земля составляет минимальный угол с осью суточного вращения планеты. Таким образом, в дни солнцестояния Земля находится на прямой SS', которая проходит через Солнце параллельно проекции оси суточного вращения планеты на плоскость эклиптики, — в точках пересечения указанной прямой SS' с эллиптической орбитой. В дни равноденствия линия Солнце — Земля направлена перпендикулярно оси суточного вращения планеты. Соответственно, в дни равноденствия Земля находится на прямой EE', которая проходит через Солнце перпендикулярно прямой солнцестояний SS'.

Строго говоря, ось суточного вращения Земли прецессирует примерно вокруг нормали к эклиптике с сохранением угла наклона к плоскости орбиты вокруг светила (под воздействием приливной силы со стороны Луны). Период прецессии примерно 26 тыс. лет. Соответственно, линии SS' и EE' солнцестояний и равноденствий поворачиваются вместе с прецессирующей осью суточного вращения Земли, тогда как большая и малая оси эллиптической орбиты Земли остаются неподвижными относительно звёзд на данном масштабе времени. Таким образом, точки солнцестояний и равноденствий медленно перемещаются по эллиптической орбите Земли с периодом 26 тыс. лет.

Согласно условию, в настоящее время Земля примерно проходит перигелий в день зимнего солнцестояния. Поэтому линия солнцестояний SS' примерно совпадает с большой осью эллипса земной орбиты. Тогда линия равноденствий EE' проходит через Солнце (фокус эллипса) примерно параллельно малой оси эллипса. Линия равноденствий EE' смещена относительно малой оси эллипса вместе с Солнцем на расстояние eR, где $e = 1{,}7\ \% = 0{,}017$ — так называемый эксцентриситет эллипса, R — половина длины большой оси эллипса.

В силу второго закона Кеплера, искомые временные интервалы между равноденствиями пропорциональны площадям фигур, на которые рассекает эллипс линия равноденствий EE'. Бóльшая из фигур представляет собой половину эллипса, отсекаемого малой полуосью, с добавлением полосы K между малой осью эллипса и параллельной ей линией равноденствий EE'. Тогда как мéньшая фигура представляет собой вторую половину эллипса с вычитанием полосы K.

Обозначим за $S_{1/2}$ площадь половины эллипса, а S_K площадь полосы K. Тогда один земной год пропорционален площади всего эллипса $2S_{1/2}$, а интервал от весеннего до осеннего равноденствия — площади $S_{1/2} + S_K$ бóльшей из вышеуказанных фигур (содержащей афелий). Таким образом, интервал от весеннего до осеннего равноденствия в годах равен доли $(S_{1/2} + S_K)/(2S_{1/2}) = 1/2 + S_K/(2S_{1/2})$, которую занимает соответствующая фигура от всей площади эллипса. Аналогично находим интервал в годах от осеннего до весеннего равноденствия: $1/2 - S_K/(2S_{1/2})$. Разность между «полугодиями» равна $\{[1/2 + S_K/(2S_{1/2})] - [1/2 - S_K/(2S_{1/2})]\}$ лет $= S_K/S_{1/2}$ лет.

Для расчёта отношения $S_K/S_{1/2}$ площадь $S_{1/2}$ половины эллипса можно заменить площадью $\pi R^2/2$ половины окружности с радиусом R (в силу малого отличия эллипса от окружности). В свою очередь, полоса K близка к прямоугольнику со сторонами $2R$ и eR, поэтому её площадь $S_K \approx 2eR^2$. Получаем требуемое отношение $S_K/S_{1/2} \approx 2eR^2/(\pi R^2/2) = 4e/\pi$ и искомое отличие полугодий

$$4e/\pi \text{ лет} = (4e/\pi) \times 365 \text{ сут} = 4 \times 0{,}017 \times 365/3{,}14 = 7{,}9 \text{ сут.}$$

По «расписанию» солнцестояний и равноденствий на интернет-странице ru.wikipedia.org/wiki/Равноденствие можно вычислить, что в настоящее время разность между «полугодиями» равна 7,6 суток, что отличается менее чем на 5 % от полученного выше ответа.

4. $\boldsymbol{N\sqrt{E_0/m_0}}$**.**

Методом индукции можно проверить, что масса головного отсека и следующих за ней k ступеней равна массе $(k+1)$-й ступени: $m_0 = m_1$, $m_0 + m_1 = 2m_1 = m_2$, $m_0 + m_1 + m_2 = m_2 + m_2 = 2m_2 = m_3$, $m_0 + \ldots + m_k = m_k + m_k = 2m_k = m_{k+1}$. Тогда распрямляясь, $(k+1)$-я пружина разводит в противоположные стороны следующую за ней $(k+1)$-ю ступень с массой $m_{k+1} = 2^k m_0$ и часть звездолёта с той же массой $2^k m_0$, состоящую из головного отсека и остающихся k пружин. Такое разделение удобно рассматривать в инерциальной системе отсчёта, в которой звездолёт покоится до начала работы $(k+1)$-й пружины (по окончании отделения $(k+2)$-й пружины и ступени). В силу вышеуказанного равенства масс, пружина сообщает одинаковые (противоположно направленные) скорости $(k+1)$-й ступени и остальной части звездолёта с головным отсеком. Центр инерции пружины остаётся на месте.

Потенциальная энергия пружины $E_{k+1} = 2^k E_0$ переходит в суммарную кинетическую энергию $(k+1)$-й ступени и остальной части звездолёта $2 \times (m_{k+1}u^2/2) = 2^k m_0 u^2$, что определяет приобретаемую скорость $u = \sqrt{E_0/m_0}$ отделяемой ступени и остальной части звездолёта относительно центра инерции пружины. (Вышеуказанная кинетическая энергия есть не что иное, как возникающая энергия относительного движения частей звездолёта, тогда как энергия движения центра масс двух рассматриваемых блоков звездолёта сохраняется в любой системе отсчёта.) Найденная скорость u представляет собой изменение скорости головного отсека звездолёта в одной из инерциальных систем отсчёта за счёт работы $(k+1)$-й пружины. Изменение скорости не зависит от системы отсчёта. Поэтому в исходной системе отсчёта (в которой полностью укомплектованный звездолёт покоился в начальный момент времени) скорость головного отсека возрастает на одну и ту же величину u после работы каждой из пружин. Таким образом, после распрямления всех N пружин головной отсек приобретёт скорость $Nu = N\sqrt{E_0/m_0}$.

1. а) 4) Титан.
б) 1) за 4 года.
в) 1) в белый карлик.
г) 3) в 4 раза.
д) 3) рассеянием света в атмосфере Земли.
е) 2) в 2 раза меньше.
ж) 2) примерно такой же.

2. а) 940 К;
б) да, избежит.

Температура верхних слоёв Юпитера определяется балансом потоков падающего на планету солнечного излучения и собственного излучения планеты. Планета перехватывает от полного потока излучения светила (исходящего во все направления) часть, которая равна отношению поперечного сечения планеты к площади сферы, содержащей орбиту планеты как свой большой круг. Поэтому при переходе на новую орбиту, часть перехватываемого Юпитером солнечного потока увеличивается обратно пропорционально квадрату линейного размера орбиты, например, квадрату её радиуса — в $(L_0/L')^2$ раз. В свою очередь, поток собственного излучения планеты должен увеличиться во столько же раз. Таким образом, четвёртая степень температуры планеты возрастёт в $(L_0/L')^2$ раз, что определяет уравнение на температуру T' на новой орбите:

$$\frac{T'^4}{T_0^4} = \frac{L_0^2}{L'^2}\,,$$

а следовательно, и саму температуру $T' = T_0\sqrt{L_0/L'} = 130\sqrt{5{,}2/0{,}1}$ К $= 940$ К.

При такой температуре водород остаётся в молекулярном состоянии (энергия связи атомов в молекуле 4,5 эВ). Планета избежит катастрофического испарения, если тепловая скорость молекул водорода окажется меньше второй космической скорости. Для этого характерная тепловая кинетическая энергия молекул $3k_{\text{Б}}T'/2$ должна быть меньше их гравитационной потенциальной энергии $G\,(2m_{\text{p}})\,M_{\text{Ю}}/R_{\text{Ю}} = 2m_{\text{p}}g_{\text{Ю}}R_{\text{Ю}}$ на поверхности планеты (в последнем равенстве использовано выражение для ускорения свободного падения $g_{\text{Ю}} = GM_{\text{Ю}}/R_{\text{Ю}}^2$; масса молекулы водорода равна $2m_{\text{p}}$). Получаем условие на температуру

$$T' < \frac{4m_{\text{p}}g_{\text{Ю}}R_{\text{Ю}}}{3k_{\text{Б}}} = \frac{4\times(1{,}7\cdot10^{-27}\ \text{кг})\times(25\ \text{м/с}^2)\times(7\cdot10^{7}\ \text{м})}{3\times1{,}38\cdot10^{-23}\ \text{Дж/К}} \approx 2{,}9\cdot10^{5}\ \text{К}.$$

Данное условие выполнено для найденной температуры $T' = 940$ К, поэтому планета избежит катастрофического испарения.

3. $\boldsymbol{3H_0^2/(8\pi G)}$**.**

Пылинка, находившаяся изначально в точке $\vec{r}$, движется в поле тяготения частиц, расположенных в нулевой момент времени в шаре радиуса r. Гравитационное поле внешних слоёв облака взаимно компенсируется и обращается в нуль. Таким образом, пылинка летит как в гравитационном поле точечного тела с массой $M = 4\pi r^3\rho/3$, где ρ — начальная плотность облака. Пылинка будет неограниченно удаляться от центра облака, если скорость частицы $v = H_0 r$ превысит вторую космическую скорость для начальной удалённости r. Такое условие эквивалентно требованию, что кинетическая энергия пылинки $mv^2/2 = mH_0^2 r^2/2$ больше потенциальной энергии $GmM/r = 4\pi G m \rho r^2/3$, где m — вспомогательная масса пылинки, G — гравитационная постоянная. Получаем условие бесконечного убегания пылинки

$$H_0^2/2 > 4\pi G\rho/3,$$

которое не зависит от начальной удалённости r (и массы пылинки). Приведённое условие ограничивает плотность облака сверху и тем самым определяет искомую максимальную плотность

$$\rho_{\text{макс}} = 3H_0^2/(8\pi G),$$

при которой частицы преодолеют собственное притяжение и облако разлетится.

4. 3,4.

Поскольку Марс является внешней по отношению к Земле планетой, то в моменты его соединения и противостояния с Солнцем к наблюдателю повёрнута вся его освещённая поверхность. В таком случае принимаемый поток излучения от Марса обратно пропорционален квадрату расстояния между Марсом и Землёй. В моменты противостояния и соединения Марс удалён от Земли соответственно на минимальное и максимальное возможное расстояние $R_{\text{М}} - R_{\text{З}}$ и $R_{\text{М}} + R_{\text{З}}$, где $R_{\text{М}}$ и $R_{\text{З}}$ — радиусы орбит Марса и Земли. В соответствии с вышеизложенным, получаем отношение между потоками $F_{\text{п}}$ и $F_{\text{с}}$ в моменты противостояния и соединения через радиусы орбиты планет:

$$\frac{F_{\text{п}}}{F_{\text{с}}} = \frac{(R_{\text{М}} + R_{\text{З}})^2}{(R_{\text{М}} - R_{\text{З}})^2} = \frac{(1 + R_{\text{З}}/R_{\text{М}})^2}{(1 - R_{\text{З}}/R_{\text{М}})^2}\,,$$

и искомую разность звёздных величин Марса:

$$m_{\text{с}} - m_{\text{п}} = 2{,}5\lg\left(\frac{F_{\text{п}}}{F_{\text{с}}}\right) = 5\lg\left(\frac{1 + R_{\text{З}}/R_{\text{М}}}{1 - R_{\text{З}}/R_{\text{М}}}\right), \tag{1}$$

которые зависят от отношения $R_{\text{З}}/R_{\text{М}}$.

Отношение $R_{\text{З}}/R_{\text{М}}$ связано третьим законом Кеплера

$$\frac{R_{\text{З}}^3}{R_{\text{М}}^3} = \frac{T_{\text{З}}^2}{T_{\text{М}}^2}$$

с периодами обращения планет вокруг Солнца $T_{\text{З}}$ и $T_{\text{М}}$ (зависимость периода обращения планеты от расстояния до Солнца выводится из уравнения Ньютона для движения по окружности в гравитационном поле точечного тела). Тогда разность звёздных величин (1) перепишется через отношение периодов $T_{\text{З}}/T_{\text{М}}$ в виде

$$m_{\text{с}} - m_{\text{п}} = 5\lg\left[\frac{1 + (T_{\text{З}}/T_{\text{М}})^{2/3}}{1 - (T_{\text{З}}/T_{\text{М}})^{2/3}}\right]. \tag{2}$$

В момент противостояния радиус-векторы планет, проведённые от Солнца, сонаправлены. Далее каждый из радиус-векторов за время t после противостояния поворачивается на угол $2\pi t/T_{\text{З}}$ и $2\pi t/T_{\text{М}}$ для Земли и Марса соответственно. К моменту соединения Марса с Солнцем угол между радиус-векторами $2\pi t/T_{\text{З}} - 2\pi t/T_{\text{М}}$ должен составить π, что определяет уравнение на интервал τ между противостояниями и соединениями:

$$2\pi\tau\left(\frac{1}{T_{\text{З}}} - \frac{1}{T_{\text{М}}}\right) = \pi,$$

или

$$\frac{\tau}{T_З}\left(1-\frac{T_З}{T_М}\right)=\frac{1}{2}\,.$$

Из данного уравнения находим связь между отношениями периодов $T_З/T_М$ и $T_З/\tau$:

$$\frac{T_З}{T_М}=1-\frac{T_З}{2\tau}\,,$$

которое подставляем в выражение (2) и получаем искомую разность звёздных величин:

$$m_с-m_п=5\lg\left\{\frac{1+[1-T_З/(2\tau)]^{2/3}}{1-[1-T_З/(2\tau)]^{2/3}}\right\}=5\lg\left\{\frac{1+[1-365/(2\times 390)]^{2/3}}{1-[1-365/(2\times 390)]^{2/3}}\right\}=3{,}4,$$

где подставлено время $\tau=390$ сут и длительность земного года $T_З=365$ сут.

Приведённый ответ справедлив в отношении «среднестатистического» противостояния, когда расстояние между планетами равно 0,52 а. е. Поскольку орбиты планет отличаются от окружности, расстояние между телами заметно варьируется от противостояния к противостоянию от 0,37 до 0,67 а. е. — почти в 2 раза (для соединений относительная вариация расстояний существенно меньше), см. www.astronet.ru/db/msg/1418882 . Поэтому разность звёздных величин Марса в соединении и противостоянии, строго говоря, варьируется примерно от 4,2 (в случае великого противостояния) до 2,8.